Département d'Astrophysique Relativiste et de Cosmologie

LA LOGIQUE DE L'AUTO-DIFFERENCE

J. SCHNEIDER

N° 91054

A paraître dans les actes du colloque ' Mathématiques Fantastiques ' (Paris, mars 1991)

DARC
Observatoire de Paris-Meudon
5, Place Jules Janssen
92195 MEUDON Cedex

LA LOGIQUE DE
L'AUTO-DIFFERENCE[1]

Jean SCHNEIDER
Observatoire 92195 Meudon

La logique formelle, à qui rien n'échappe, ne considère que des enchaînements de chaînes de caractères sans signification. Dès cette première phrase apparaît une contradiction puisqu'elle recourt à des mots de la langue qui font sens, et que par là elle manque son idéal. D'une certaine manière c'est de ce paradoxe qu'il va s'agir dans cet exposé; en fait je me propose en quelque sorte de le formaliser. Cette formalisation, poussée dans ses retranchements, livrera les ressources et les perspectives pour un mode de pensée nouveau d'une logique *non linéaire, non stratifiée.* Je montrerai alors comment cette non stratification peut aider à éclaricir plusieurs notions du domaine des sciences humaines, en particulier l'(auto)-émergence du sens. On verra sur quelques exemples comment cet outil formel permet des lectures et des articulations que l'on apercevrait moins aisément sans son concours.

Avant d'en arriver là il est utile de rappeler quelques éléments bien connus de logique. Celle-ci a d'abord été un art de bien raisonner, c'est-à-dire d'enchaîner correctement des arguments et des idées. Puis sont rapidement apparues, d'abord chez les grecs sous la forme du paradoxe du menteur, des apories du raisonnement. Plus près de nous, au XIX^{eme} siècle, d'un art de combiner des *concepts* (ayant toujours du sens), la logique est progressivement devenue une algèbre, manipulation automatique de signes sans signification, à laquelle est attachée le nom de Boole. Avec la théorie des ensembles les apories sont réapparues, sous une espèce formalisée: c'est le paradoxe de Russel bien connu qui porte sur l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. Dans

[1]A paraître dans les actes du colloque "Mathématiques Fantastiques" (Paris, mars 1991)

les années 1930 s'est alors constituée une technique, la logique combinatoire, largement construite dans le but d'analyser et de contourner ce paradoxe. Celle-ci a à son tour produit un nouveau paradoxe, plus redoutable, le paradoxe de Curry qui est en fait fructueux car il est, comme on le verra, riche d'enseignements. Cette technique de la logique combinatoire semble être assez peu répandue, en France du moins, c'est pourquoi j'en rappelerai les grandes lignes.

1 La logique formelle

En général un système formel est constitué de:
- signes ou caractères élémentaires
- chaînes de caractères appelés énoncés
- suites d'énoncés appelés démonstrations

Comme les signes et les énoncés sont sans signification ils ne peuvent pas en changer au cours du texte contrairement aux mots de la langue qui sont suceptibles de nuances et d'évocations toujours nouvelles. Les démonstrations sont soumises à certaines règles appelées axiomes. Les énoncés résultant de l'application de ces règles sont des ' énoncés bien formés ' (des *ebf*).

Il y a deux types de signes élémentaires: les variables qui désignent des énoncés quelconques et les constantes (comme '=' (égalité), '&' (et), '$\sim$' (non), '$\vee$' (ou)) qui représentent des 'opérateurs' agissant sur ces énoncés; ainsi $a\&b$, $a \vee b$ et $\sim a$ désignent respectivement '*a et b*', '*a ou b*' et la négation de a. Les énoncés sont 'empilés' les uns au dessous des autres selon des suites, obéissant à des règles, appelées démonstrations. Les opérateurs ne sont pas définis à partir de leur sens intuitif mais uniquement par les règles axiomatiques auxquels ils obéissent. Ainsi la règle fondamentale qui régit l'égalité s'écrit:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & a & \text{hypothèse} \\ 2 & =aa & \text{(on écrit plus habituellement } a=a\text{)} \end{array}$$

Voici ensuite la règle axiomatique élémentaire exprimant que si l'on admet les énoncés a et b séparément comme hypothèses alors il en résulte l'énoncé unique $a\&b$:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & a & \text{hypothèse} \\ 2 & b & \text{hypothèse} \\ 3 & a\&b & \end{array}$$

De même l'axiome selon lequel une double négation équivaut à une affirmation s'écrit:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & \sim(\sim a) & \text{hypothèse} \\ 2 & a & \end{array}$$

Dénotons par $a \Rightarrow b$ l'implication logique (*a implique b*). La règle d'application du syllogisme se formule alors ainsi:

$$\begin{array}{r|ll|l} 1 & a & \text{hypothèse} & \textit{Socrate est un homme} \\ 2 & a \Rightarrow b & \text{hypothèse} & \textit{être un homme implique être mortel} \\ 3 & b & & \textit{donc Socrate est mortel} \end{array}$$

Symétriquement si dans une chaîne de déductions figurent d'abord a puis b, la règle d'introduction du syllogisme permet d'en conclure $a \Rightarrow b$:

$$\left|\begin{array}{l} . \\ a \\ . \\ b \\ a \Rightarrow b \end{array}\right.$$

A partir de ces éléments fondamentaux la logique formelle est une technique d'enchaînements implacables de déductions, sans aucune restriction à cette mécanique. Tout ce que l'on demande à un système logique est qu'il soit non contradictoire, qu'on ne puisse démontrer $a\&(\sim a)$, c'est-à-dire à la fois a et $\sim a$, pour aucun a. Cette absence de restriction conduit à un paradoxe, le paradoxe bien connu de Russel. Celui-ci est une transposition formelle du paradoxe antique du menteur qui met en acte une situation pragmatique où un locuteur prononce un énoncé dont le contenu est en contradiction avec son énonciation ("Moi, Epiménide le Crétois, j'affirme que quoi que disent les Crétois ils mentent"). Rappelons brièvement la forme ensembliste intuitive du paradoxe:

Soit $\mathbf{A}$ l'ensemble des x qui ne s'appartiennent pas: $\mathbf{A} = \{x|x \notin x\}$ ($x \notin x$ désigne $\sim (x \in x)$, soit "x n'appartient pas à x"). La proposition " $\mathbf{A}$ ne s'appartient pas à lui-même " est à la fois vraie est fausse:

- si $\mathbf{A}$ appartient à $\mathbf{A}$ il est l'un des x qui ne s'appartiennent pas à eux-mêmes, donc $\mathbf{A}$ n'appartient pas à $\mathbf{A}$;

- si $\mathbf{A}$ n'appartient pas à $\mathbf{A}$ il <u>n'est pas</u> l'un des x qui ne s'appartiennent pas à eux-mêmes, donc $\mathbf{A}$ appartient à $\mathbf{A}$.

Plus formellement:

- si $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$ alors $\mathbf{A} \in \{x|x \notin x\}$, donc $\mathbf{A} \notin \mathbf{A}$

- si $\mathbf{A} \notin \mathbf{A}$ alors $\mathbf{A} \notin \{x|x \notin x\}$, donc $\sim (\mathbf{A} \notin \mathbf{A})$, ce qui revient au même que $\mathbf{A} \in \mathbf{A}$.

L'on s'est rapidement aperçu que la cause de ce paradoxe est que l'on considère comme légitimes les 'ensembles qui s'appartiennent à eux-mêmes'. Dans le langage formel cela revient à dire que $x \in x$ est admis comme *ebf*. C'est pourquoi pour couper court à toute possibilité d'apparition du paradoxe la plupart des systèmes (théorie des ensembles, théorie des types) ont décrété $x \in x$ illégitime.

Si cette solution a eu l'avantage de pouvoir construire la théorie des ensembles et toutes les structures mathématiques qui s'en suivent, utiles dans les sciences de la nature et certaines 'sciences humaines', elle a aussi un inconvénient. En effet de nombreux exemples de la langue naturelle sont là pour attester de la pertinence de $x \in x$. Par exemple il est clair que 'abstrait' est abstrait (c'est-à-dire appartient à l'ensemble des objets abstraits), que 'expression française' est une 'expression française' etc.

C'est pourquoi je considère comme indispensable de pouvoir construire des systèmes intégrant $x \in x$. C'est le cas de la logique combinatoire qui a été développée en particulier par H. Curry. Je me servirai essentiellement du modèle élaboré sous le nom de 'système **Q**' par F.B. Fitch. Sans exposer tout le système rappelons-en les principaux éléments.

1.1 La Logique combinatoire (1)

1.1.1 Les symboles

Ce sont, en plus des variables, les 4 constantes classiques $=$, $\sim$, $\vee$ et & auxquelles s'ajoutent 5 constantes spécifiques de la logique combinatoire appelées *combinateurs* et dénotées respectivement **I**, **K**, **C**, **W** et **B**; à ces derniers il est commode d'adjoindre le combinateur dérivé **S** (voir dans l'appendice).

1.1.2 Abstraction

On notera que le signe $\in$ d'appartenance à un ensemble ne figure pas dans le système. En revanche on peut, dans la plupart des cas, faire une lecture 'applicative' des énoncés: si un énoncé peut se décomposer en Fa, on peut le lire comme "a possède l'attribut F" ou "a est dans F" ou "a appartient à F". Si $E(a)$ est un énoncé contenant a on peut toujours, au moyen des combinateurs, le transformer en un énoncé de la forme Fa (c'est du moins une conjecture qui ne s'est jamais démentie, voir dans l'appendice). Donc en vertu de la lecture applicative de Fa, $E(a)$ équivaut à "a est dans F". Mais écrire $E(a)$ équivaut à écrire que a est dans la classe des x tels que $E(x)$. De ce fait F peut être considéré comme étant la 'classe des x satisfaisant $E(x)$' que l'on note naturellement $\{x|E(x)\}$. Autrement dit $E(a)$ équivaut à Fa, c'est-à-dire à $\{x|E(x)\}a$.

Le sytème **Q** permet d'introduire deux notions qui seront utiles à notre propos: les auto-référents et les nombres naturels.

1.1.3 Les auto-référents

Si $E(a)$ désigne un *ebf* où figure a, l'égalité

$$a = E(a) \tag{1}$$

est, selon l'expression de Fitch, une *relation auto-référentielle* en a; j'appelerai un tel a un *auto-référent*. On pourrait être tenté de s'engager à partir de là dans une suite infinie $a = E(a) = E(E(a)) = ...$ qui n'est pas sans rappeler le paradoxe de Zénon: ce serait se condamner à ne jamais atteindre a. C'est le mérite de Fitch d'avoir démontré un résultat très important: prise comme équation logique portant sur a, la relation (1) a toujours au moins une solution. En effet posons $y = xx$ et

$$Y = \{x|E(y)\}$$

Alors, comme on peut en voir la démonstration dans l'appendice, $a = YY$ est une solution de $a = E(a)$. En particulier si $E(a)$ est simplement $\sim a$ on retrouve la solution bien connue de $a =\sim a$, à savoir $a = FF$ où

$$F = \{x| \sim (xx)\}$$

N'oublions pas que suivant notre lecture applicative $\sim (xx)$ et FF s'interprètent comme "x n'appartient pas à x" et "F appartient à F". Ainsi F est la classe des x qui ne s'appartiennent pas à eux-mêmes; $FF =\sim (FF)$ se lit: "l'énoncé selon lequel 'F est dans F' est égal à l'énoncé selon lequel 'F n'est pas dans F' ": c'est la version combinatoire du Menteur qui est un énoncé paradoxal, surprenant, mais non contradictoire. Cette situation mérite des commentaires:
- d'une part on n'affirme pas que FF ou que $\sim (FF)$. Tout ce qui est affirmé c'est que ces deux énoncés sont égaux (un peu comme en algèbre où $x = -x$ pour $x = 0$ sans que cela pose problème).
- d'autre part on peut démontrer qu'on aboutirait néanmoins à une contradiction si on imposait le principe du tiers exclu (pour tout a nécessairement a ou $\sim a$ est vrai) dans toute sa généralité à tous les *ebf*, et en particulier à FF. Mais le système **Q** n'impose pas le tiers exclu à tous les énoncés, seulement à ceux de la forme $x = y$; autrement dit pour x et y quelconques $(x = y) \vee (x \neq y)$ est un axiome de la théorie; cela suffit à produire des résultats suffisament riches.
- cela nous conduit à une réflexion sur l'écriture: le tiers exclu n'est pas un axiome du sytème **Q**, autrement dit $a \vee (\sim a)$ n'est, pour un a quelconque, pas un *ebf*, c'est-à-dire n'est pas écrit; mais son contraire, $\sim (a \vee (\sim a))$, ne l'est pas non plus sinon, puisque $\sim (a \vee (\sim b)) = (\sim a)\&b$, cela conduirait à écrire l'énoncé contradictoire $(\sim a)\&a$. Autrement dit:

ne pas *écrire* A   est différent de   *écrire* **non** A

On a affaire à une sorte de logique à deux valeurs explicites mais qui possède une troisième valeur 'cachée': à coté du 'vrai' (écrire A) et du 'faux' (écrire $\sim A$) il y a une troisième valeur non dite (non écrite): ne pas écrire A. Il y a comme une présence du hors-champ de l'écriture [(2)].

1.1.4 Les nombres

Rappelons que dans l'axiomatique usuelle de la théorie des nombres, celle de Peano, l'essentiel est de définir pour tout n un 'successeur' s(n), tel que deux nombres différents ne puissent avoir le même successeur, et un $\mathbf{0}$ qui ne soit le successeur d'aucun nombre. Le notion de successeur permet alors de construire tous les nombres à partir du $\mathbf{0}$ ($\mathbf{1} = s(\mathbf{0})$, $\mathbf{2} = s(\mathbf{1})$, ..., $\mathbf{n}+\mathbf{1} = s(\mathbf{n})$). En logique combinatoire on peut définir, à partir des combinateurs **C**, **K**, **S** et **B**, le $\mathbf{0}$ par $\mathbf{0} = \mathbf{CK}$ et la notion de successeur par $s(\mathbf{n}) = \mathbf{SBn}$. Il est facile de vérifier que pour tout nombre $\mathbf{x}$ on a $s(\mathbf{x})ab = a(\mathbf{x}ab)$; par conséquent si $\mathbf{x}ab$ contient n occurences de a, $s(\mathbf{x})ab$ en contient $n+1$. C'est ce qui renforce l'interprétation arithmétique de l'opérateur $s = \mathbf{SB}$.

On dispose ainsi d'un système cohérent qui contient à la fois des énoncés du type xx et toute l'arithmétique; il doit donc permettre de faire beaucoup de choses. Cependant comme tel il est source d'un nouveau paradoxe, le paradoxe de Curry, découvert par cet auteur en 1942.

1.2 La non stratification

1.2.1 Le paradoxe de Curry

Donnons-en ici une formulation intuitive, la version rigoureuse de Fitch étant présentée dans l'appendice [(3)]. Soit p et Z deux énoncés quelconques. Désignons par $E(Z)$ la formule $Z \Rightarrow p$. Quel que soit p imposons à Z la relation auto-référentielle

$$Z = E(Z)$$

Elle a une solution qui est donc telle que $Z = (Z \Rightarrow p)$. A partir de là le paradoxe se déroule en deux étapes:

1- Il est facile dans un premier temps de démontrer $Z \Rightarrow p$. En effet supposons Z. Comme $Z = (Z \Rightarrow p)$ cela revient à supposer aussi $Z \Rightarrow p$. Autrement dit nous supposons Z et $Z \Rightarrow p$. Par application du syllogisme à ces deux énoncés, p est ainsi démontré sous réserve de l'hypothèse Z. Autrement dit $Z \Rightarrow p$ est démontré.

2- Démontrons maintenant Z. Nous venons de démontrer $Z \Rightarrow p$ qui n'est donc plus une hypothèse. Or $Z \Rightarrow p$ est égal à Z. Donc Z est démontré et n'est plus une hypothèse. Mais puisque Z est démontré et que préalablement $Z \Rightarrow p$ a été démontré une nouvelle application du syllogisme à ces deux énoncés implique que p est, sans n'être plus soumis à aucune hypothèse, démontré. CQFD.

Ce raisonnement peut sembler spécieux; sa présentation rigoureuse dans l'appendice montre qu'il n'en est rien. Comme l'énoncé p de départ était quelconque, il met en évidence un fait assez extraordinaire: tout énoncé, quel qu'il soit est démontrable. C'est la ruine de la logique car on peut tout démontrer et son contraire. Plus précisémment on peut ainsi en particulier démontrer, pour a quelconque, $a\&(\sim a)$ ce qui est la définition que nous avons adoptée d'un système contradictoire. C'est donc un paradoxe plus radical que celui de Russel:

- celui-ci ne conduit pas à une contradiction si on adopte la version affaiblie du principe du tiers exclu $(a = b) \vee (a \neq b)$ alors que le paradoxe de Curry subsiste même dans ce cas;
- dans le cas où le paradoxe de Russel conduit à une contradiction, elle porte sur l'unique énoncé FF construit plus haut alors que le paradoxe de Curry conduit à $p\&(\sim p)$ pour tout p.

Diverses solutions ont été proposées pour ce paradoxe. Elles consistent toutes à introduire d'une manière ou d'une autre des restrictions dans les bases de départ de la théorie. Ainsi, sans entrer ici dans les détails de la notion qu'il introduit, Curry impose des restrictions aux 'objets primitifs' de la théorie. La solution proposée par Fitch consiste plutôt à restreindre les règles de déduction: il remarque que Z est à la fois une étape de la preuve est une hypothèse de la sous-preuve préliminaire qui consiste à démontrer $Z \Rightarrow p$. Il propose donc la 'restriction de non-récurrence' (voit l'appendice):

Un énoncé E *ne peut être l'étape d'une preuve résultant d'une sous-preuve qui a* E *pour hypothèse.*

Cette restriction introduit quelque chose de nouveau dans la logique formelle: l'applicabilité des règles de déduction dépend de leur contexte. Le texte strict d'un énoncé et de ses prédécesseurs immédiats ne suffisent plus: il faut explorer leur entourage plus lointain. Cette intrusion de l'extratextuel fait dériver vers la pragmatique jusqu'ici propre aux langues naturelles.

1.2.2 La stratification

Dans la discussion de ces problèmes une notion importante a été introduite par Church et précisée par Curry. Celui-ci la formule dans le cadre de ce qu'il appelle la théorie de la fonctionnalité. Intuitivement partons de la lecture 'applicative' de $c = ab$: l'application de l'attribut a à l'objet b donne l'énoncé c; on peut l'interprèter de la manière suivante: c est le résultat de la fonction a appliquée à l'objet b. On peut représenter cela de la manière classique suivante:

$$b \xrightarrow{a} c$$

Des énoncés plus complexes comme $d = (ab)c$ ou $d = a(bc)$ sont respectivement représentés par

$$\begin{array}{ll} b \xrightarrow{a} (ab) & \\ & c \longrightarrow (ab)c=d \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ll} c \xrightarrow{b} bc & \\ & a \longrightarrow a(bc)=d \end{array}$$

Comme ces représentations graphiques le suggèrent bien, ces énoncés sont 'stratifiés' dans la mesure où les fonctions d'une part et les objets auxquelles elles s'appliquent d'autre part sont clairement répartis par strates distinctes. Plus abstraitement, dans un énoncé stratifié un terme ne peut en même temps être un prédicat et ce à quoi il s'applique. Mais considérons maintenant $b = aa$ qui dans le système **Q** est légitime. Selon notre lecture 'applicative', a est en même temps une fonction et l'argument sur lequel elle porte. Graphiquement:

$$a \xrightarrow{a} b$$

Diagramme 1

Ce graphe a l'inconvénient de représenter a deux fois alors qu'il n'y a qu'un a. Pour contourner cet inconvénient je propose la représentation inhabituelle [4]:

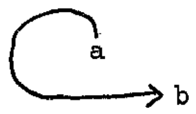
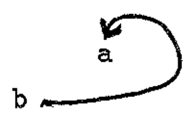


Diagramme 2

De même $a = ab$ se traduit par:



Ces énoncés sont non-stratifiés. Ce sont eux qui provoquent le paradoxe de Curry: en effet le terme Z de l'énoncé $Z \Rightarrow p$ sur lequel il repose est (comme toute solution d'une équation auto-référentielle) de la forme YY (où en l'occurrence $Y = \{x|(xx) \Rightarrow p\}$). Pour résoudre le paradoxe qu'il a découvert, Curry a éliminés ces énoncés de sa présentation de la théorie. Dans le système **Q** de Fitch avec la restriction de non-récurrence ils sont au contraire admis. Comme ils ouvrent des perspectives très riches et même, à mon sens, profondes, j'adopterai le système de Fitch avec la restriction de non récurrence. Remarquons simplement pour l'instant qu'avec cette non-stratification la notion de 'niveau' s'efface: on ne peut plus simplement classer les termes en objets, opérations sur les objets, opérations sur les opérations etc., et ce de façon *cohérente*. En fait, quelle que soit sa solution, le paradoxe de Curry est surtout une source d'inspiration: il a mis au jour la possibilité décrire $Z = (Z \Rightarrow p)$, ce qu'on peut considérer comme une sorte d'auto-implication de p puisque, dès que l'on pose p, Z est constructible et p déductible; cela ouvre la possibilité d'une logique de l'acausalité. Développons cela.

2 La logique combinatoire et les sciences humaines

Nous disposons maintenant d'un instrument rigoureux mais un peu lourd. Il sera, pour l'exploiter, plus facile d'en user assez métaphoriquement, mais en sachant qu'il est toujours possible de revenir à la rigueur si un point obscur se présente.

L'effort qui suit a pour but de comprendre comment fonctionnent les instances de 'l'esprit humain'. Diverses conceptualisations ont été élaborées dans des disciplines comme la linguistique, la psychologie, la philosophie. Toujours des descriptions sont faites des notions introduites avec les mots de la langue qui sont déjà à notre disposition. Cela conduit inévitablement à une certaine représentation métaphorique. On peut voir dans cette métaphorisation l'indice d'une impossibilité radicale de dire la chose et de la fatalité à ne jamais pouvoir que l'approcher. D'autre part la langue est ainsi faite que, comme le notait Bergson, beaucoup de métaphores sont d'ordre géométrique. Or il est à mes yeux certain qu'une représentation géométrique du monde du sens est une violence faite à ce dernier. C'est pourquoi je crois salutaire d'aller dans le sens d'une dégéométrisation des notions qui lui appartiennent. Une autre approche intéressante est de substituer, parfois du moins, aux mots de la langue une certaine formalisation. Le procédé s'est avéré prodigieusement efficace dans le domaine des sciences de la nature (qui aujourd'hui se ramènent toutes à la physique). Peut-il en être de même dans les 'sciences humaines'? J'espère montrer dans la suite que oui. Dans les nombreux exemples d'essais de ce genre proposés jusqu'ici on note une prééminence certaine des modèles sinon géométriques du moins topologiques (par exemple la théorie des catastrophes); ils jouent à mon sens un rôle plutôt réducteur. Je me propose de montrer comment la logique non stratifiée offre beaucoup plus de souplesse et comment et où elle permet de situer avec précision l'essence des phénomènes humains opposés aux phénomènes physiques [(5)]. Dans le cadre restreint du présent article je me contenterai de quelques indications rapides.

Dans ce but, je partirai d'un exemple, le temps.

2.1 Le temps

Le temps est une catégorie élementaire qui, du moins au départ, ne peut être conçue comme une 'superstructure' susceptible d'avoir une architecture complexe (comme par exemple la plupart des phénomènes psychologiques). Par temps j'entends ici la temporalité originaire au sens de Heidegger, opposée à la chronologie des physiciens qui est un comptage numérique d'instances dont l'essence individuelle échappe à ce comptage, les instants. La physique sait compter les instants mais ne sait pas dire en quoi ils consistent (même lorsque ce comptage a la puissance du continu et fait des instants des points sur une ligne). Par une approche phénoménologique de la temporalité et un recours à l'analyse du langage, on peut montrer que, sur le plan de sa structure formelle, *un instant est la transition entre lui-même et un autre*, autre qu'il est ensuite légitime d'appeler le suivant. En désignant cet instant par t et par t' le suivant, cela se traduit par la formule non rigoureuse "$t =$transition$(t \longrightarrow t')$"; c'est d'ailleurs pourquoi il est pertinent d'appeler un tel instant un instant *transitionnel.* Pour que cette formulation soit rigoureuse il faut encore définir ce qu'on appelle transition et évacuer de ce mot sa dimension temporelle sinon on ne ferait qu'expliquer le temps par le temps. En termes intemporels une transition c'est une opération, une fonction. Donc

$$t = F : t \longrightarrow t'$$

t est la fonction qui à t associe t'. En termes formels une fonction du type $a \longrightarrow b$ n'est rien d'autre que la donnée, pour tout a, de la paire abstraite (a, b). Donc finalement

$$\boxed{t = (t, t')}$$

ce qui est un exemple de formule auto-référentielle [6].

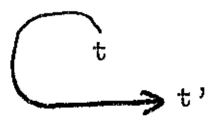
Comme je l'ai dit plus haut la logique auto-référentielle est rigoureuse. Mais nous pouvons donner des lectures métaphoriques de ses formules. En fait il s'agit 'd'antimétaphores': je veux dire par là que si la seule vérité est dans les formules, les lectures qu'on peut en donner ne sont pas nouvelles, ce sont au contraire les formules qui permettent de comprendre après-coup ces analogies et métaphores anciennes et de se dégager de leur emprise géométrisante. Voici donc quelques variations et associations autour de $t = (t, t')$.

Dans $t = (t, t')$, (t, t') est un écart. Comme cet écart est égal à t, un instant est donc un écart, écart entre lui-même et un autre. C'est par là que l'on mesure la structure non géométrique d'un instant transitionnel car en géométrie un écart, une distance ne peuvent être en même temps un intervalle et une extrémité de cet intervalle.

Un instant transitionnel est non stratifié. Il est en même temps un ensemble (la paire (t, t')) et une partie propre de cet ensemble, l'un des éléments de la paire. Il est remarquable que Curry rejette les énoncés non stratifiés car, dit-il, "un objet ne peut être une partie propre de lui-même", ce qu'il ne justifie d'ailleurs pas [7]. Il me semble au contraire que c'est tout l'intérêt du système **Q** que d'admettre de tels objets. Comme on ne peut pas, du fait de l'égalité $t = (t, t')$, invoquer t sans invoquer t', l'instant t est essentiellement inachevé (et se prolonge en une suite t',t'',... [6]).

La relation $t = (t, t')$ dit qu'il y a une vacillation entre l'objet t et la relation (t, t') à laquelle il appartient. C'est ce que cette vacillation contient de dynamique qui met le temps en marche. D'autre part dans notre formule de base t' est différent de t et (t, t') est en quelque sorte la différence entre t et t'; mais t est précisément égal à cette différence. C'est pourquoi il est légitime de parler, comme l'annonce le titre de cette étude, de logique de l'auto-différence.

Enfin, pour arrêter de parler pour ne rien dire de plus que $t = (t, t')$, la représentation graphique



permet de comprendre l'auto-génération des instants transitionnels. On est en présence d'une logique de l'auto-création, donc en fait de la création, qui permet de situer la solution du paradoxe de Zénon d'Elée: la flèche d'Achille peut partir car le mouvement n'est pas dérivé du temps, il est originaire par rapport à celui-ci; c'est exactement ce que dit la formule $t = (t, t')$: le mouvement que constitue le déplacement de t vers t' est déjà dans t.

Nous pouvons maintenant relire rapidement quelques grands auteurs qui ont médité sur le temps à la lumière de la logique non stratifiée qui apporte à la fois un éclairage nouveau, de nouvelles perspectives et une plus grande rigueur de pensée.

Du fait de la formule $t = (t, t')$ l'instant t est comme distendu entre lui-même et le suivant t': il est en somme sa propre distension. Au bout de l'analyse du temps menée par St Augustin, celui-ci trouve la 'distentio ': "... il m'est apparu que le temps n'est pas autre chose qu'une distension, mais de quoi?". St Augustin ajoute "Il serait surprenant que ce ne fût pas de l'esprit lui-même". Ainsi chez lui la compréhension du temps recourt à celle d'une autre instance, l'esprit. Il est plus satisfaisant, parce que plus économique, de supposer que ce qui est distendu c'est le temps lui-même et de substituer à la 'distentio animi' de St Augustin une 'distentio tempori' (en fait, et ce n'est pas notre propos ici, nous touchons là le point où Heidegger a montré que *tempus* et *anima*, *Zeit* et *Sein* fusionnent partiellement). Il reste à expliquer comment l'âme-temps peut à la fois être séparée d'elle-même et une. $t = (t, t')$ dit cela avec une précision toute mathématique.

La formule $t = (t, t')$ exprime aussi que t n'est pas un point mais est 'étalé' sur tout l'intervalle (t, t'). Cet étalement non spatial c'est la Dehnung (extension), la Gespannheit (écartement) et la Erstreckung (étirement) qui pour Heidegger caractérisent l'instant présent [8]. Cet écart va jusqu'à l'écartèlement: Henri Maldiney nous rappelle opportunément que "le *Zeit* germanique évoque une division: la racine *di* de la forme ancienne haute-allemande *Zit* de *Zeit* se retrouve dans diviser, déchirer" [9]; la formule $t = (t, t')$ nous dit précisément que t est divisé en t et t' et comment s'articule cette division.

Dans le cas de Plotin nous sommes amenés à nous livrer à un exercice différent: éprouver que la formule $t = (t, t')$ rend possibles et claires les formulations que lui-même critique pour leur obscurité. C'est ainsi, pour ne prendre qu'un exemple, qu'il reproche (implicitement à l'encontre d'Aristote) l'obscurité de la proposition selon laquelle "le temps serait un accompagnement du mouvement dans le temps" (*Ennéades III, 7, 10, 7*). La formule $t = (t, t')$ rend de telles formulations cohérentes puisqu'elle dit que l'accompagnement qui va de t à t', symbolisé par (t, t'), c'est précisément t. E. Bréhier parle, en commentant ce texte, de 'cercle vicieux' (*Ennéades III*, p. 146), c'est-à-dire de définition circulaire. La philosophie est coutumière de définitions de ce genre. Est-ce pourtant une objection? Non car d'abord on observera que dans le cas présent il ne s'agit pas d'un véritable cercle fermé: le graphisme $t \to t'$ lui-même le suggère, la figure du cercle est inadéquate puisque ce cercle est brisé, ouvert. Ensuite c'est le mérite de la logique combinatoire que de permettre des énoncés, donc des définitions, auto-référentielles où, selon la structure de la formule (1), le *definiendum* est contenu dans le *definiens*.

2.2 Le langage

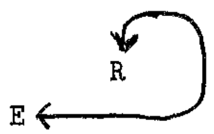
Passons de la phénoménologie du temps à la linguistique. Au sein de cette discipline l'analyse syntaxique et sémantique des énoncés constitue pour l'instant le champ d'application privilégié de la logique combinatoire [(10)]. Mais la linguistique ne s'intéresse pas qu'aux énoncés, elle s'intéresse aussi à l'analyse de leurs conditions de productions. Dans les langues naturelles un constatif est un code qui établit une correspondance entre un énoncé et une situation ou une action extérieures au langage. En termes de fonctionnalité à la Curry on a donc une structure stratifiée:

$$\mathtt{E(nonce)} \xleftrightarrow{\ \mathtt{correspondance}\ } \mathtt{R(eferent)}$$

Dans cette situation, que l'énoncé soit ou non proféré il n'a aucune action sur le référent. Un performatif par contre, du simple fait de son énonciation, crée ce qu'il désigne en même temps qu'il désigne ce qu'il crée. Ainsi lorsque je dis "je vous souhaite la bienvenue", ou même plus simplement "bonjour", ces paroles ne désignent rien de purement extérieur à elles-mêmes, elles désignent leur propre production qui est maintenant leur unique référent. Formellement on a la structure non stratifiée

$$\mathrm{E} \xleftrightarrow{\qquad \mathrm{R} \qquad} \mathrm{R}$$

ou mieux:



Nous aboutissons ainsi de façon naturelle à l'idée d'une auto-émergence du sens, d'ailleurs parallèle à celle du temps d'où leur lien [(11)]. Nous avons de la sorte accompli ce qui était annoncé dans l'introduction: la formalisation du mouvement par lequel la logique formelle se fonde sur un fondement sans fond, non formalisable.

La non stratification des performatifs [(12)] a pour fondement celle de la dimension signifiante et transcendentale qui est donc elle-même non stratifiée. On peut le vérifier chez Heidegger. Les formulations par lesquelles il conclut ses analyses de la Parole, de l'Ereignis sont révélatrices: "La Parole, nous dit-il, est parlante", "L' Apparition apparaît" , "L' Appropriement approprie" (deux traductions différentes mais pertinentes toutes les deux de "Ereignis ereignet" [(13)]). Heidegger dit quelque part que ce ne sont pas là des tautologies. En effet, dire que la Parole est parlante c'est dire que le sujet de la Parole n'est autre que la Parole elle-même; ce qui dans le cadre de la logique classique serait une absurdité ou une obscurité devient rigoureux et clair dans le cadre de la logique non-stratifiée. Des analyses semblables peuvent êtres faites de "Ereignis ereignet". Nous pouvons préciser encore davantage en relisant *Temps et Etre*. Après une série de réflexions sur le mode d'existence de Temps et de Etre Heidegger nous propose la formule "es gibt Zeit, es gibt Sein", ce que l'on traduit habituellement par "il y a temps, il y a être". Mais que signifie cet "il"? Il s'agit, nous dit-il "que nous pensions cet "il" à partir du genre de donation qui lui appartient" (puisqu'en allemand "es gibt" signifie littéralement "il donne" ou "ça donne"). Reste alors la question: quel est le sujet de la donation? La logique non stratifiée, auto-référentielle, suggère sans peine une réponse naturelle: c'est la donation elle-même qui donne, c'est la donation qui est donnante: la donation donne le Temps et la donation donne l'Etre. A plusieurs reprises dans son œuvre Heidegger souligne très nettement que la logique n'est pas en mesure de formuler de telles notions. Cette position était tout à fait justifiée dans la mesure où il se référait à la logique classique, c'est-à-dire stratifée; la logique non stratifiée comble cette insuffisance.

2.3 Les autres dimensions du sens

En passant de la linguistique à l'ontologie nous étions restés dans des registres où le langage est prééminent. Mais celui-ci n'a pas le monopole de la dimension signifiante (même s'il est un cas tout à fait privilégié). Regardons la peinture par exemple. Dans un premier temps la peinture, comme les constatifs du langage, représente 'fidèlement' les personnage et les objets de la nature qui sont là de toute façon, extérieurs à l'acte de peindre. Dans un deuxième temps la liberté du crayon et du pinceau permet de représenter et de créer des formes qui, telles que les arabesques et les volutes, n'existent pas dans la nature, brefs des formes pures, ce qu'on appelle l'art abstrait. N'y a-t-il pas là un paradoxe? Un dessin abstrait représente bien quelque chose puisque c'est là sur la feuille; mais ce dessin étant abstrait ne représente rien qui existe; alors que représente-t-il? Il représente la forme qu'il vient de créer et qui est maintenant là devant le spectateur. En ce sens la représentation d'une forme abstraite est un mouvement et le dessin représente le mouvement-même de la représentation; c'est cela 'l'expression'. Mais si l'on réfléchit bien, dans un troisième temps tout dessin, toute peinture, et plus généralement toute représentatation plastique, figuratifs agissent de même et ne représentent pas directement un objet réel mais ajoutent à leur modèle une manière de le voir et en même temps représentent cette dernière. Sans doute ces ébauches d'analyse ne sont-elles pas nouvelles; ce que l'idée de non stratification ajoute c'est de pouvoir les formuler avec davantage de clarté et de rigueur et de montrer leur parenté avec d'autres registres signifiants.

2.4 Le sujet

La non stratification permet d'aborder avec un éclairage nouveau les notions de sujet et de subjectivité. Un objet O est ce qui est là devant nous et avec quoi nous avons des rapports d'extériorité (perception, représentation, conceptualisation etc.) qui par une correspondance appropriée C produit un certain résultat R (le perçu, le représenté, le conceptualisé etc.) interne au sujet, soit

$R = CO$. Graphiquement:

$$O \xrightarrow{C} R$$

Cette situation est stratifiée et on peut poser le sujet et l'objet séparement et indépendemment l'un de l'autre. Comme les divers exemples précédents l'ont en particulier illustré, il y a des situations où le sujet n'est plus détachable des objets et des relations qu'ils entretiennent avec lui. Je poserai que cette situation est paradigmatique et que ce qui fait l'essence logique de la subjectivité c'est la non-stratification. Si l'on admet que les 'sciences exactes' s'occupent des objets et que les sciences humaines s'occupent de subjectivité, on est conduit à donner une caractérisation logique de leur coupure radicale: la logique des sciences exactes est stratifiée alors que la logique des sciences humaines est non-stratifiée. Disons-le autrement: la logique non stratifiées commence par isoler les instances dans des strates séparées, hétérogènes; puis elle homogénéise ou égalise, partiellement, ces strates (par le signe = d'une relation autoréférentielle); c'est cette égalisation qui caractérise les effets de sujet. Nous sommes de la sorte conduit à un mode de pensée radicalement différent de celui des conceptions systémiques de l'homme et de la société qui les analysent en termes d'une énonomie de systèmes et de sous-sytèmes: cette économie reste stratifiée, même lorsque l'on y introduit des boucles rétro-actives, aussi complexes soient-elles.

Mettons maintenant le doigt sur une propriété de la non-stratification pas encore mentionnée jusqu'ici: c'est une sorte de vacillation entre l'unité et la dualité. Dans la structure générique du type $S = PS$ (où S est le sujet et P un prédicat) S est à la fois décomposable, puisqu'il qu'il contient P distinct de S et indécomposable puisqu'on ne peut le scinder en deux parties distinctes: l'une des parties de S, à savoir S lui-même, contiendra toujours, aussi loin qu'on mène la dissection, le S de départ (nous l'avons vu, Curry dit que S contient une partie propre de lui-même). De la sorte S est marqué d'une incomplétude, qui répond à l'inachèvement de l'instant, puisqu'on ne peut l'écrire sans invoquer P. En ce sens il contient à la fois un terme et deux termes. Du point de vue de cette sorte de proto-arithmétique on a *un* = *deux* [6]. Cette analyse intuitive [14] est d'ailleurs confirmée par le modèle arithmétique de la logique combinatoire où l'on peut montrer en toute rigueur que, si $S = PS$, alors $\mathbf{1}PS = \mathbf{2}PS$ [15]. Mais laissons là la rigueur et poursuivons le thème de l'unité duelle. Il est remarquable qu'on le trouve dès les années 30 chez le psychanalyste hongrois Imre Hermann. Il a comme tel été repris par N. Abraham dans *l'Ecorce et le Noyau*. Pour ces auteurs l'unité duelle est une manière nouvelle d'analyser et de comprendre l'instinct filial lors de la relation mère-enfant la plus précoce. Ici encore je dois me contenter d'indications rapides. Selon N. Abraham, "le prétendu instinct maternel n'est rien d'autre que l'aptitude de la mère à projeter chez l'enfant son propore instinct filial et à l'y vivre comme par procuration. Grâce à l'empathie maternelle les partenaires de l'unité duelle sont branchés l'un sur l'autre.." (p. 359). En remarquant au passage que les deux partenaires n'ont pas un rôle symétrique, concentrons-nous sur la logique de cette relation: l'enfant (E) serait construit par la relation (ici l'instinct filial) de l'enfant à la mère (M); de même que Plotin dénonçait la circularité de la définition aristotélicienne du temps, on pourrait être tenté de trouver une telle formule illogique; la logique combinatoire en la transcrivant, en simplifiant beaucoup, sous la forme $E = E \longrightarrow M$ (ou peut-être $E = M \longrightarrow (E \longrightarrow M)$), montre qu'il s'agit d'une pensée tout à fait rigoureuse. Grâce à elle des formules comme "l'unité duelle est le séparé-non séparé, la séparation incluse dans le non séparé" (p. 397) ne peuvent pas surprendre. [16]

2.5 L'auto-référence généralisée

Tous les exemples de non-stratification que nous avons rencontrés jusqu'ici entrent dans le cadre de l'auto-référence puisqu'ils sont du type $a = E(a)$. Cette auto-référence simple est elle-même un cas particulier d'une auto-référence généralisée qui porte non plus sur un seul auto-référent mais sur plusieurs auto-référents à la fois: ainsi dans le cas de deux auto-référents a-t-on

$$\begin{aligned} a &= A(a, b, ...) \\ b &= B(a, b, ...) \end{aligned}$$

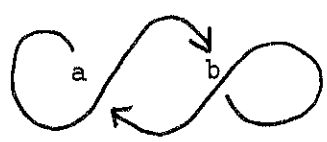
Pour trois auto-référents on a naturellement

$$\begin{aligned} a &= A(a, b, c, ...) \\ b &= B(a, b, c, ...) \\ c &= C(a, b, c, ...) \end{aligned}$$

Fitch a montré que ces 'équations' auto-référentielles généralisées ont à nouveau toujours une solution. J'appelerai auto-référence *fermée* ou *saturée* les cas où <u>tous</u> les termes qui figurent dans $A(...)$, $B(...)$, $C(...)$ etc. sont définis auto-référentiellement à partir des autres. Et là encore on peut s'inspirer de la théorie de la fonctionnalité de Curry et représenter graphiquement ce qui se passe. Ainsi par exemple

$$\begin{aligned} a &= ba \\ b &= ab \end{aligned}$$

se traduit par

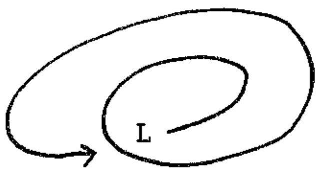


On voit se dessiner l'idée d'une logique *non linéaire.*

Dans ce dernier exemple il s'agit d'une auto-référence fermée à deux termes. On peut faire plus simple et considérer l'auto-référence fermée à un seul terme, soit $a = aa$. A titre d'illustration il n'est pas difficile de se convaincre que, si L désigne le langage (naturel), l'affirmation, qui appartient elle-même au langage, selon laquelle "le langage est son propre métalangage" relève de cette structure. En effet un opérateur C qui 'applique' un métalangage L_1 sur un langage L_2 se formalise par $L_2 = CL_1$; dans le cas présent $L_1 = L_2 = L$ et de plus C, étant formulée en langue naturelle, est de l'espèce L; c'est pourquoi le mécanisme à l'œuvre dans la phrase en question est du type $L = LL$ (17), soit graphiquement

$$\mathrm{L} \xrightarrow{\mathrm{L}} \mathrm{L}$$

Dans le diagramme 1 nous avions remplacé deux a par un seul pour aboutir au diagramme 2. Si nous nous livrons ici à la même opération, c'est les *trois* L qu'il faut remplacer par un seul; on obtient alors:



Un œuil exercé verra là la projection sur le plan de la feuille d'un ruban de Mœbius. Cette invocation de la topologie rappelle qu'elle a parfois servi d'analogie pour comprendre diverses instances non matérielles: Heidegger a recours à la métaphore du pli pour faire comprendre la différence ontologique (différence entre l'être et l'étant), Laplanche utilise l'analogie du dièdre pour articuler l'auto-conservation et la sexualité, Lacan représente le sujet par un ruban de Mœbius. Prise à rebours, cette association d'idées suggère que là où la topologie produit des images trop spatiales la logique non-stratifiée est beaucoup plus adéquate et plus près de ce dont il s'agit. Les figures, inspirées de la fonctionnalité de Curry, dont on vient de voir quelques exemples sont elles-mêmes des métaphores de formules censées être, elles, rigoureuses. Poursuivons dans la voie de cette logique non-linéaire par un exemple d'autoréférence fermée à trois termes; désignons-les par exemple par R, S et I et considérons le système fermé

$$R = S\mathbf{R}I$$

$$S = I\mathbf{R}R \qquad (2)$$

$$I = R\mathbf{R}S$$

où $a\mathbf{R}b$ désigne un certain rapport (à vrai dire ici non spécifé et qui pourrait simplement être ab) entre a et b. Chacun des trois termes n'est défini qu'à partir des deux autres. Si l'on supprime l'un des termes, il n'est plus possible de définir les deux autres; si l'on garde les termes mais que l'on supprime l'une des trois relations la non-stratification disparaît partiellement. Si l'on symbolise $a\mathbf{R}b$ par $a \longrightarrow b$ le graphe correspondant est

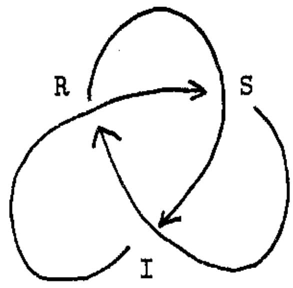


Diagramme 3

On peut enrichir le schéma précédent en adjoignant trois autres termes r, s et i et en posant:

$$\begin{array}{ll} R = s\mathbf{R}r & r = S\mathbf{R}R \\ S = i\mathbf{R}s & s = I\mathbf{R}S \\ I = r\mathbf{R}i & i = R\mathbf{R}I \end{array} \qquad (3)$$

Le graphe de cette situation compliquée est également compliqué:

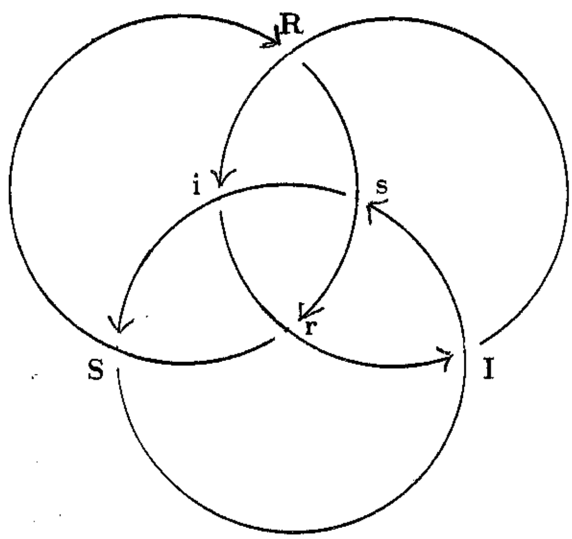


Diagramme 4

On reconnaîtra un exemple de ces nœuds borroméens par lesquels Lacan cherchait à figurer l'idée que trois termes, ici R, S et I, sont interdépendants au point que si l'on en supprime un les deux autres deviennent indépendants: en effet si dans une lecture topologique du diagramme 4 on coupe l'un des cercles les deux autres se libèrent [(18)]. Ne prenons pas parti sur le bien-fondé de cette interdépendance des trois instances R, S et I telles que les conçoit cet auteur; je ferai seulement deux remarques:

a) Les diagrammes 3 et 4 introduisent en plus des termes R, S et I des données géométriques supplémentaires qui ne sont pas dans les formules (2) et (3), à savoir les lacets qui joignent les nœuds et l'espace à trois dimensions dans lequel il faut plonger le diagramme pour qu'il fonctionne comme le désire Lacan.

b) Si, comme je le propose, on veut faire la connexion entre les diagrammes 3 et 4 et les formules logiques (2) et (3), le diagramme 4 et sa traduction formelle (3) introduisent, par rapport au diagramme 3 et à sa traduction formelle (2), la complication inutile que sont les termes r, s et i qui se traduisent graphiquement par trois self-intersections supplémentaires.

Il me semble donc que le diagramme 3, dès l'instant où on le regarde comme figuration des formules (2), représente de façon plus économique l'interdépendance visée. Ce diagramme a d'ailleurs été envisagé en premier par Lacan [(19)].

Mais ce n'est pas là la première fois que Lacan jouait avec trois cercles. Déjà dans une discussion du sophisme des trois prisonniers il montrait l'intérêt d'une situation où la prise décision de chacun d'entre eux dépend de celle des deux autres. Rappelons l'histoire: le directeur de la prison dit à trois prisonniers "j'ai ici cinq cercles, deux noirs et trois blanc, et je vais en attacher un dans le dos de chacun d'entre vous sans qu'il sache lequel (mais chacun pourra voir le cercle mis dans le dos de ses deux compagnons); le premier qui pourra me dire, argumentation à l'appui, la couleur du cercle dans son dos sera libre". Sur ce le directeur attache dans le dos de chacun des prisonniers un cercle blanc. Alors au bout d'un certain temps de reflexion les trois prisonniers sortent d'un même pas et chacun dit "je suis blanc". Laissons Lacan rapporter leur raisonnement [(20)]: "Je suis blanc et voici comment je le sais. Etant donné que mes compagnons étaient des blancs, j'ai pensé que si j'étais un noir chacun d'eux aurait pu en inférer ceci:"si j'étais un noir moi aussi l'autre y devant reconnaître immédiatement qu'il est un blanc serait sorti aussitôt, donc je suis moi un blanc" et tous deux seraient sortis ensemble, convaincus d'être des blancs. S'ils n'en faisaient rien c'est que j'étais un blanc comme eux et je suis sorti".

La logique non stratifiée est particulièrement bien adaptée pour décrire cette situation. En fait sa formalisation complète est assez complexe [(21)]. On trouvera dans l'appendice une formalisation simplifiée. Le principe en est le suivant. Les prises de décision D_1, D_2 et D_3 des trois prisonnier résultent chacune d'un certain raisonnement complexe R (le même pour les trois prisonniers) et des décisions (réelles et supposées) des deux autres. Autrement dit on se trouve dans la situation auto-référentielle:

$$D_1 = R(D_1, D_2, D_3)$$
$$D_2 = R(D_2, D_3, D_1)$$
$$D_3 = R(D_3, D_1, D_2)$$

D'après le résultat très général de Fitch elle a nécessairement une solution.

Finalement ces trois exemples suggèrent que la logique combinatoire peut exprimer de façon plus adéquate que la topologie des nœuds la manière dont plusieurs instances sont mutuellement intriquées.

On aura compris que cette série de regards brefs sur des exemples puisés dans des domaines variés sert à illustrer l'idée que la logique combinatoire est un instrument à la fois suffisamment souple pour exprimer une pensée déliée et non linéaire dont ont besoin les sciences humaines et suffisamment structuré pour leur apporter un langage précis et être un guide sûr pour en explorer les subtilités sans les dénaturer. Bien entendu il a encore bien d'autres champs d'applications que ceux invoqués dans cette étude. Si on veut bien lui faire confiance il est susceptible de faire découvrir des articulations nouvelles que les sciences humaines n'avaient jusqu'ici pas proposées.

Notes

(1) On trouvera un exposé de la logique combinatoire chez, par ordre croissant de difficulté, Grize, Fitch, Desclées et Curry cités dans la bibliographie.

(2) La notion importante de manque serait plutôt du coté de "ne pas écrire **A**" que du coté de "écrire non **A**".

(3) Voir aussi Desclées *Langages applicatifs...* p. 204

(4) On trouve dans *La transparence de l'énonciation* p.21 de F. Récanati un graphe approchant, soit $x \longrightarrow y$, mais qui selon son auteur illustre que "le représentant (x) fait inflexion sur lui-même en même temps qu'il représente le représenté (y)"; selon le shéma $x \to y$, x est plutôt en même temps le représentant (ou le représenté, selon le cas) et l'opération de représentation elle-même; sur la couverture de son ouvrage l'auteur fait figurer un dragon qui se mord la queue alors que ce dont il s'agit c'est plutôt d'un dragon qui 'mord son mordre', d'où l'impossibilité d'une représentation figurative, géométrique.

(5) Dans un article intitulé *Self-reference in philosophy*, Fitch avait déjà mentionné, sans en donner d'illustrations vraiment philosophiques, l'interêt, pour la pensée, de l'auto-référence.

(6) Cf. J. Schneider *La structure auto-référentielle de la temporalité.* On pourrait aussi se contenter de la formule $t' = tt$ dont la lecture applicative donne la même représentation graphique $t : t \longrightarrow t'$ (je dois cette remarque à Jean-Pierre Desclées). D'une part elle est plus satisfaisante parce que plus économique et évite de recourir à la notion supplémentaire de paire; donc en toute rigueur c'est $t' = tt$ qui est la formulation la plus 'pure' de la temporalité. Mais d'autre part $t = (t, t')$ a l'avantage de marquer plus explicitement la notion d'écart inscrite dans t et qui sera importante dans la suite.

(7) H. Curry, *Combinatory logic*, pp. 288 et 293

(8) M. Heidegger, *Les problèmes fondamentaux de la phénoménologie* §19b

(9) H. Maldiney, *Aîtres de la langue et demeures de la pensée* p.5

(10) On trouvera chez J.P. Desclées (*Langages applicatifs...*) plusieurs exemples de telles analyses.

(11) Lien exposé de façon très claire dans *Le temps des signes* de J. Garelli.

(12) et plus généralement celle des autres types d'actes de langages; la structure des 'aspects' en liguistique relève également de la non stratification.

(13) Il doit être bien entendu que nous ne considérons ici que de la structure de ces notions. Cette structure épuise-t-elle ce qu'elles ont de propre? Sans doute pas mais ce n'est pas ce qui nous occupe ici.

(14) On notera avec intérêt la mise en valeur de l'articulation du maintenant chez Aristote par R. Brague (*Du temps chez Platon et Aristote* p. 142) "qui permet [à l'avant et à l'après] d'être à la fois un et deux". Toutefois à bien lire R. Brague il semble que la conception sous-jacente de l'articulation est géométrique, stratifiée, car l'articulant et l'articulé y sont hétérogènes, alors que selon la formule $t = (t, t')$ l'articulant est aussi l'articulé, c'est ce qui fait l'articulation.

(15) J. Schneider, *Un 'paradoxe' de la logique combinatoire: 'n=n+1'.*

(16) La question de savoir si ce concept métapsychologique est fondateur de l'unité duelle du présent ou si c'est l'inverse sera abordée ailleurs. La mise en parallèle de l'unité duelle du temps

et de celle de l'instinct filial va, c'est mon hypothèse, bien au delà d'une parenté de structure; la temporalité et l'unité duelle doivent avoir quelque chose en commun dans leur essence, comme le suggérait déjà N. Abraham.

(17) En fait cela n'est vrai en toute rigueur que dans un univers de langage réduit à cette phrase-même.

(18) J. Lacan *Le Séminaire XX* p. 113

(19) J. Lacan *Le Séminaire XX* p. 112

(20) J. Lacan *Ecrits* p. 197

(21) J. Schneider *à paraître*

(22) Fitch *A method of avoiding the Curry paradox*

APPENDICE

Dans cet appendice je ne donnerai pas *tous* les axiomes de la logique combinatoire mais seulement ceux qui aident à comprendre les argumentations développées dans le texte.

Définition des combinateurs

La logique combinatoire est née d'une volonté de comprendre la racine, pour ensuite l'extirper, du paradoxe de Russel. Dans ce but elle a poussé à son extrême l'attitude consistant à prendre la logique comme pur jeu d'écriture. Son principe consiste en une mise à plat maximum des opérations de manipulation des énoncés: non seulement les connecteurs logiques habituels 'et', 'ou', 'non' et '=' sont soumis comme dans tout système formel à une pure algèbre, mais à un degré plus primaire de l'écriture des opérations comme 'ajouter un caractère', 'concaténer deux caractères', 'supprimer un caractère' sont elles-mêmes formalisées. C'est ainsi que les combinateurs servent à manipuler les énoncés pris comme chaînes de caractères. Chaque type de manipulation est symbolisé par un 'opérateur' qui agit sur l'énoncé. Dressons la liste des manipulations à partir desquelles on peut construire toutes les autres et les combinateurs qui les symbolisent:

1- Dans la première règle axiomatique que nous avons posée figure l'énoncé '$= aa$' (qui s'écrit habituellement '$a = a$'). Le terme a y est redoublé. Ce redoublement est une opération symbolisée par le combinateur **W** et qui s'écrit:

$$\mathbf{W}ab = abb$$

Ainsi '$a = a$', c'est-à-dire '$= aa$', s'écrit '$\mathbf{W} = a$'.

2- Dans la règle '$a =\sim (\sim a)$' les parenthèses signifient que le premier signe $\sim$ s'applique au groupe de *deux* signes $\sim a$ qui vient après lui. Cette mise entre parenthèses se symbolise par le combinateur **B** et on écrit dans le cas général:

$$\mathbf{B}abc = a(bc)$$

donc ici

$$\sim (\sim a) = \mathbf{B} \sim\sim a$$

3- Selon la symétrie de l'égalité, '$= ab$' (soit '$a = b$') équivaut à '$= ba$' (c'est-à-dire '$b = a$'). Pour exprimer ce fait il est utile d'introduire le combinateur de permutation **C** défini par la règle

$$\mathbf{C}abc = acb$$

4- Soit un énoncé du type ab que, selon la lecture applicative, on peut interprèter comme "b possède l'attribut a"; l'expérience montre qu'il peut être utile d'en extraire l'objet b auquel s'applique l'attribut a. Cela peut se faire au moyen du combinateur d'annihilation **K** défini par:

$$\mathbf{K}ab = b$$

Un des traits importants de la logique combinatoire est que les combinateurs sont des symboles qui peuvent faire partie d'un énoncé et que n'importe quel combinateur peut agir sur eux. Ainsi l'expression '$\sim (\sim a)$' qui intervient dans l'axiome '$\sim (\sim a) = a$' (qui exprime qu'une double négation équivaut à une affirmation) s'écrit dans un premier temps, '$\mathbf{B} \sim\sim a$'; on observe dans cette dernière expression le redoublement de $\sim$ après **B**; celui-ci peut à son tour se formaliser par l'introduction de **W** de sorte que finalement '$\sim (\sim a)$' s'écrit '$\mathbf{WB} \sim a$'.

5- L'action des combinateurs sur d'autres combinateurs permet de construire le combinateur dérivé $\mathbf{S}=\mathbf{B}(\mathbf{B}(\mathbf{BW})\mathbf{C})(\mathbf{BB})$. On peut vérifier que $\mathbf{S}abc = ac(bc)$.

Abstraction

Considérons l'énoncé $\sim (\sim a) = a$ qui exprime qu'une double négation équivaut à une affirmation; en fait comme $a = b$ s'écrit en logique combinatoire $= ab$ (on met l'opérateur d'égalité en tête) $\sim (\sim a) = a$ doit s'écrire $= (\sim (\sim a))a$. Par une suite d'applications successives des combinateurs **B** et **W** on peut lui donner une série de formulations équivalentes:

$$\begin{array}{|l} = (\sim (\sim a))a \\ \mathbf{B} =\sim (\sim a)a \\ \mathbf{B}(\mathbf{B} =\sim) \sim aa \\ \mathbf{W}(\mathbf{B}(\mathbf{B} =\sim) \sim)a \end{array}$$

Par lecture applicative le dernier énoncé s'interprète comme " tout a satisfait l'attribut **A** " où **A** désigne $\mathbf{W}(\mathbf{B}(\mathbf{B} =\sim) \sim)$ ou bien " tout a est dans **A** ". Ce procédé nous montre sur un exemple comment transformer un énoncé $E(a)$ qui contient a en Fa. F est l'abstraction de $E(a)$ ou bien la 'classe des x tels que $E(x)$'. Très vite, on le voit, la forme explicite de F peut devenir compliquée. D'une part cela peut rendre ce procédé rébarbatif et décourageant; cela explique peut-être qu'un instrument si puissant soit si peu répandu. D'autre part il n'est en général pas utile d'écrire explicitement F, il suffit d'admettre son existence. Voici un autre exemple, familier, d'abstraction.

Soit $\sim (aa)$ la formule pour " a n'appartient pas à a ". Par abstraction on peut la transformer successivement en $\mathbf{B} \sim aa$, $\mathbf{W}(\mathbf{B} \sim)a$ et $\mathbf{BWB} \sim a$. Donc $F = \mathbf{BWB} \sim$ est 'la classe des x qui ne s'appartiennent pas'. Il est facile de vérifier que FF se transforme successivement en $FF = \mathbf{BWB} \sim F = \mathbf{W}(\mathbf{B} \sim)F = \mathbf{B} \sim FF =\sim (FF)$. Donc $FF =\sim (FF)$; c'est la version combinatoire du paradoxe de Russel.

Auto-référents

Soit $a = E(a)$ une ' équation ' auto-référentielle. Montrons qu'elle a toujours une solution. Pour ce faire introduisons l'énoncé intermédiaire G défini par $G(x) = E(xx)$. Par abstraction $G(x)$ peut se mettre sous la forme Fx, autrement dit $Fx = G(x) = E(xx)$. Si dans cette dernière expression on remplace x par F on a naturellement $FF = E(FF)$. Donc $Z = FF$ satisfait $Z = E(Z)$, CQFD.

Le paradoxe de Curry et la solution proposée par Fitch

Voici la version, donnée par Fitch, de ce paradoxe, qui utilise la méthode de la 'preuve subordonnée' [20]. Pour p quelconque définissons Y par $Y = \{x|(xx) \Rightarrow p\}$. On a alors la démonstration suivante:

1	$Y = \{x|(xx) \Rightarrow p\}$		def. de Y
2.1		YY	hypothèse
2.2		$\{x|(xx) \Rightarrow p\}Y$	utilisation de la déf. de Y dans 2.1
2.3		$(YY) \Rightarrow p$	utilisation de l'abstraction dans 2.2
2.4		p	syllogisme appliqué à 2.1 et 2.3
3	$(YY) \Rightarrow p$		définition du syllogisme appliquée à la preuve subordonnée 2.1-2.4
4	$\{x|(xx) \Rightarrow p\}Y$		introduction de l'abstraction à partir de 3
5	YY		utilisation de la déf. de Y dans 4
6	p		syllogisme appliqué à 3 et 5

Notons que si l'on pose $Z = YY$ alors $Z = (Z \Rightarrow p)$; ici ce n'est pas la conclusion qui, comme parfois, est dans les prémisses, c'est la déduction elle-même.

Fitch fait remarquer que dans cette démonstration l'énoncé YY est le résultat de la sous-preuve 2.1-2.4 (étape 5) alors qu'il en est en même temps l'hyopthèse (étape 2.1). Il propose de prémunir le sytème **Q** de ce genre d'anomalie en posant la restriction:

Les démonstrations dans lesquelles le résultat E d'une sous-preuve est en même temps hypothèse de cette sous-preuve ne sont pas valides.

Cela élimine le paradoxe de Curry d'office.

Le sophisme des trois prisonniers

Rappelons qu'il s'agit que trois prisonniers doivent, pour pouvoir sortir de prison, deviner quelle couleur, noir ou blanc, on leur a attribuée. Le lecteur pourra aussi se reporter aux essais de formalisation de E. Porge (*Se compter trois*). La formalisaion complète du sophisme en logique combinatoire est assez complexe [(21)]. Voici une formalisation un peu simplifiée où, pour chacun des trois prisonniers ($i = 1, 2, 3$), S_i, N_i et B_i désignent respectivement 'le prisonnier i sort', 'le prisonnier i est noir' et 'le prisonnier i est blanc':

$$S_1 = C(S_1, S_2, S_3) \& C(S_1, S_3, S_2)$$
$$S_2 = C(S_2, S_3, S_1) \& C(S_2, S_1, S_3)$$
$$S_3 = C(S_3, S_1, S_2) \& C(S_3, S_2, S_1)$$

et où $C(S_1, S_2, S_3)$ désigne

$$(\sim S_2) et (N_1 \Rightarrow (N_2 \Rightarrow ((B_3 \Rightarrow S_3) et \sim S_3) \Rightarrow S_2).$$

On a un système triangulaire auto-référentiel qui a donc, comme l'a démontré Fitch en toute généralité, nécessairement une solution. Il n'y a pas, jusqu'ici du moins, de représentation graphique de cette formulation (pas plus que pour le paradoxe de Russel $a =\sim a$).

REFERENCES

N. ABRAHAM ET M. TOROK *L'écorce et le noyau* (Aubier-Flammarion 1978)

S[t] AUGUSTIN *Les Confessions* Livre XI

R. BRAGUE *Du temps chez Platon et Aristote* (PUF 1982)

H. CURRY *Combinatory Logic* (North Holland 1958)

F.B. FITCH *Introduction to Combinatory Logic* (Yale Univ. Press 1974)

F.B. FITCH *A method of avoiding the Curry paradox* in 'Essays in honor of C.G. Hampel' (Reidel 1969) p. 265

F.B. FITCH *Self-reference in philosophy* in 'Mind' (1946) vol. 55 p. 64

J.P. DESCLÉES *Langages applicatifs, langues naturelles et cognition* (Hermes 1990)

J. GARELLI *Le temps des signes* (Klincksiek 1983)

J.B. GRIZE *Eléments de logique moderne III* (Armand Colin)

M. HEIDEGGER *L'acheminement vers la parole* (Gallimard)

M. HEIDEGGER *Temps et être* in *L'endurance de la pensée* (Collectif; Plon 1968)

M. HEIDEGGER *Problèmes fondamentaux de la phénoménologie* (Gallimard)

J. LACAN *Ecrits* (Le Seuil)

J. LACAN *Le Séminaire XX* (Le Seuil)

J. LAPLANCHE *La sublimation* (PUF 1980)

H. MALDINEY *Aîtres de la langue et demeures de la pensée* (l'Age d'Homme 1975)

PLOTIN *Ennéades III* (Belles Lettres 1989)

E. PORGE *Se compter trois. Le temps logique de Lacan* (Erès 1989)

F. RÉCANATI *La transparence de l'énonciation* (Le Seuil 1979)

J. SCHNEIDER *Un paradoxe de la logique combinatoire: 'n=n+1'* (à paraître)

J. SCHNEIDER *La structure auto-référentielle de la temporalité* (in 'La Liberté de l'Esprit' No. 15, Hachette 1987)